Cours 3 – 18/09/2024

1. Introduction

1.3. Cinématique

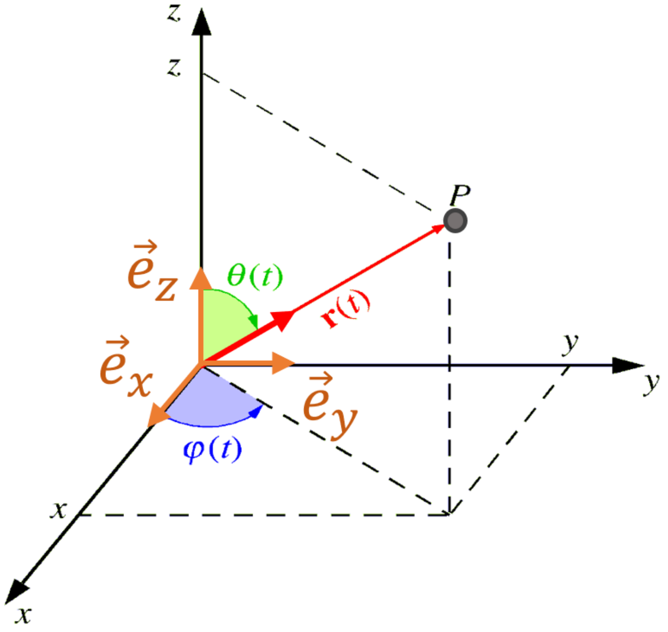
1.3.c. Coordonnées cylindriques

1.3.d. Coordonnées sphériques

1.3.e. Repère de Frenet – mouvement curviligne

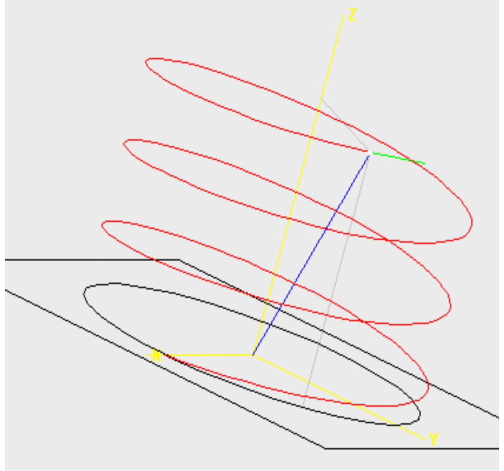
1.3.f. Mouvement circulaire uniforme

1.3.g. Mouvement circulaire – Cas général

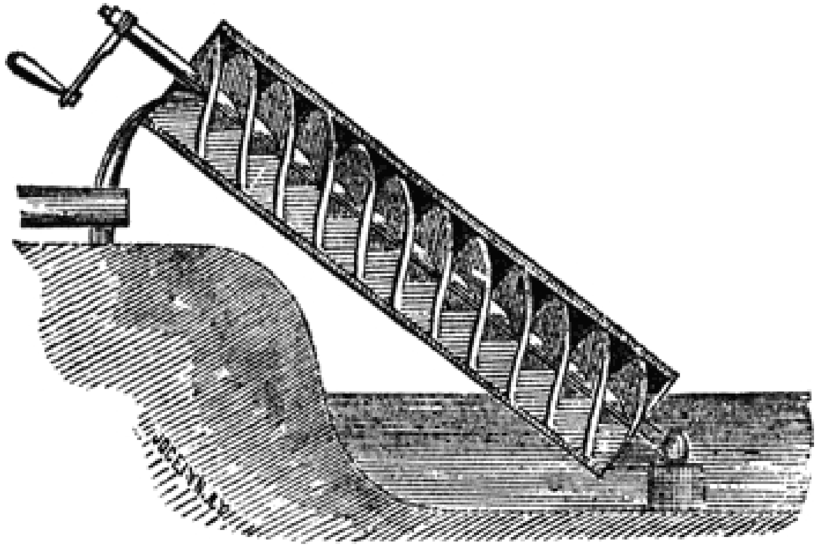


1.3.c. Coordonnées cylindiques

Application : un mouvement hélicoïdal est parfaitement décrit dans un système de coordonnées cylindriques



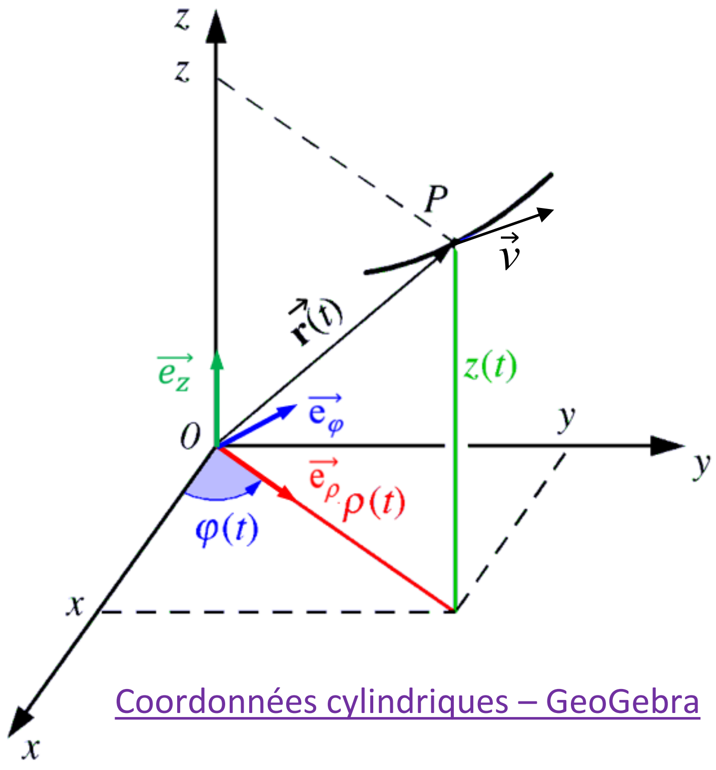
Exemple de mouvement hélicoïdal : *la vis d'Archimède*



http://en.wikipedia.org/wiki/Archimedes'_screw

1.3.c. Coordonnées cylindiques

Le repère cylindrique est défini par les vecteurs unitaires $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$ (c'est un repère orthonormé)



[Coordonnées cylindriques – GeoGebra]

Equation du mouvement : $\vec{r}(t) = \rho(t)\,\vec{e_\rho} + z(t)\,\vec{e_z}$

Composantes des vecteurs $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$ dans le repère $(O; \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$

$\vec{e}_\rho$ vecteur unité dans la direction ρ (déplacement de P si φ et z sont constants) ;

$$\vec{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_\varphi$ vecteur unité dans la direction φ : $\vec{e}_\varphi$ est tangent au cercle horizontal passant par P et de rayon ρ ;

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_z$ vecteur unité dans la direction z (ρ et φ constants) ;

$$\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Coordonnées cartésiennes des vecteurs unitaires $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$

1.3.c. Coordonnées cylindiques

Vecteurs vitesse et accélération

Equation générale du mouvement : $\vec{r}(t) = \rho(t)\,\vec{e_\rho} + z(t)\,\vec{e_z}$

$$\vec{r}(t) = \rho(t)\,\vec{e_\rho} + z(t)\,\vec{e_z} \Longrightarrow \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left[\rho\dot{\vec{e_\rho}} + \dot{\rho}\vec{e_\rho}\right] + \left[\dot{z}\vec{e_z} + z\dot{\vec{e_z}}\right]$$

ATTENTION: $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\varphi}$ dépendent du temps avec les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\vec{e_\rho}} = \dot{\varphi}\vec{e_\varphi} \\ \dot{\vec{e_\varphi}} = -\dot{\varphi}\vec{e_\rho} \\ \dot{\vec{e_z}} = 0 \end{cases}$$

Vitesse exprimée dans le repère $(O; \vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$

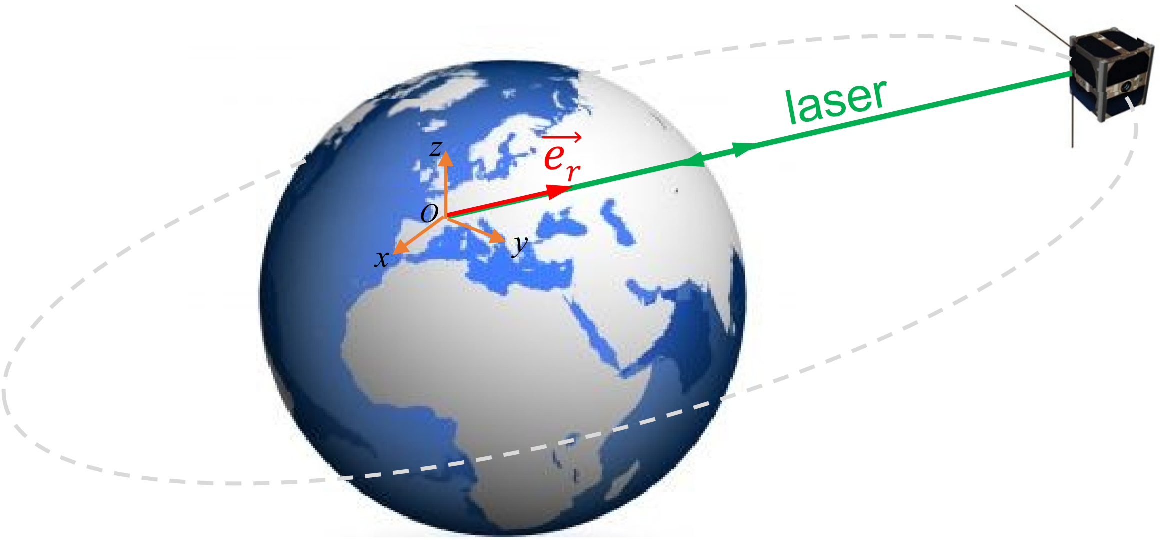
$$\boxed{\vec{v} = v_\rho\vec{e_\rho} + v_\varphi\vec{e_\varphi} + v_z\vec{e_z} \quad \begin{cases} v_\rho = \dot{\rho} \\ v_\varphi = \rho\dot{\varphi} \\ v_z = \dot{z} \end{cases}}$$

Accélération exprimée dans le repère $(O; \vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$

$$\boxed{\vec{a} = a_\rho\vec{e_\rho} + a_\varphi\vec{e_\varphi} + a_z\vec{e_z} \quad \begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases}}$$

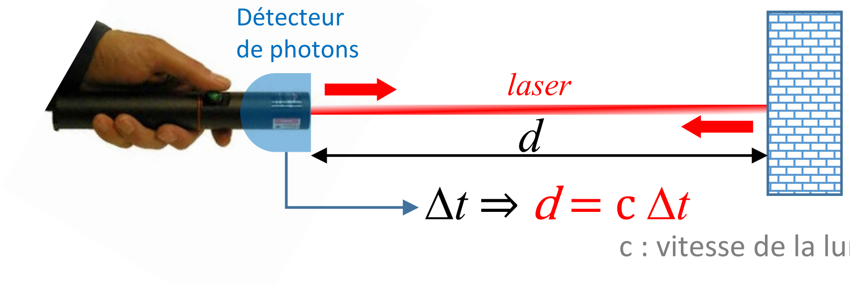
1.3.d. Coordonnées sphériques

Les <u>coordonnées sphériques</u> sont particulièrement adaptées pour des mouvements de type <u>orbital</u>. Exemple : satellite en orbite autour de la Terre



- Les coordonnées cartésiennes sont inutilisables car il n’est pas possible de mesurer x, y, et z sur de telles distances.
- En revanche, on peut mesurer facilement la distance par télémétrie laser.

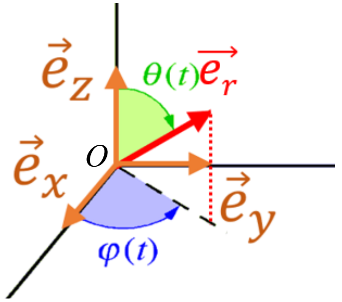
On mesure d’abord le temps Δt que met la lumière pour faire un A/R



c : vitesse de la lumière ~ $3\text{x}10^8$ m/s

Télémétrie laser sur satellites :

1) On mesure la distance par télémétrie laser
2) On repère la direction du laser (vecteur $\vec{e}_r$) avec 2 angles θ et φ définis dans un repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$



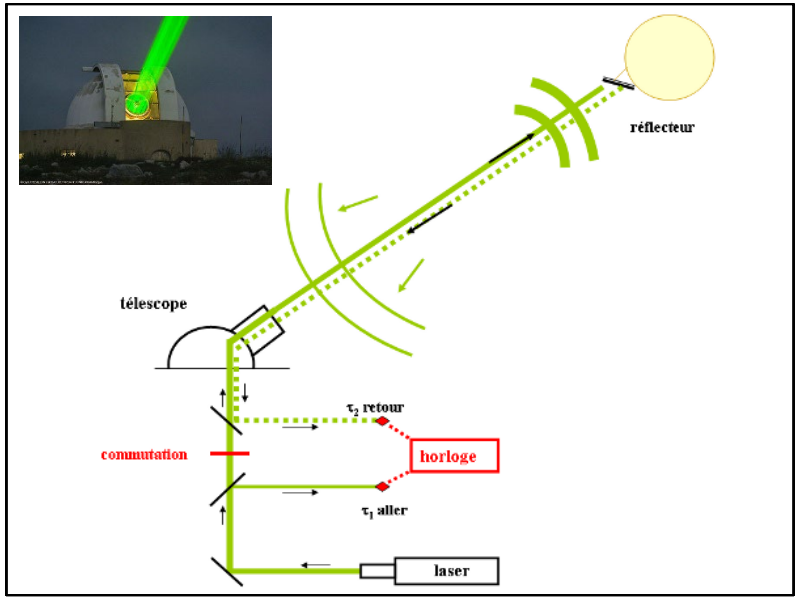
L’angle θ est défini entre $\vec{e}_z$ et $\vec{e}_r$ avec $\theta = 0$ quand $\vec{e}_z$ et $\vec{e}_r$ colinéaires
L’angle φ est défini entre $\vec{e}_x$ et la projection de $\vec{e}_r$ dans le plan (Oxy); $\varphi = 0$ quand la projection est sur $\vec{e}_x$

1.3.d. Coordonnées sphériques

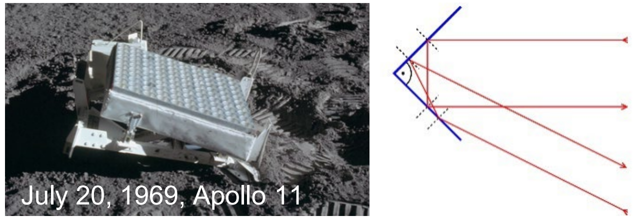
Information scientifique : tir « laser – Lune » pour mesurer la distance entre la Terre et la Lune

L'expérience de l'[Observatoire de La Côte d'Azur]

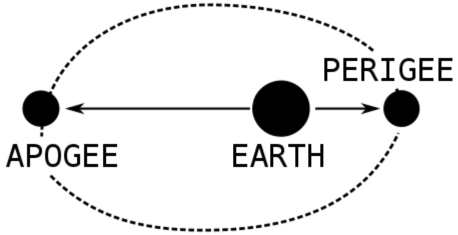
Station de tir laser



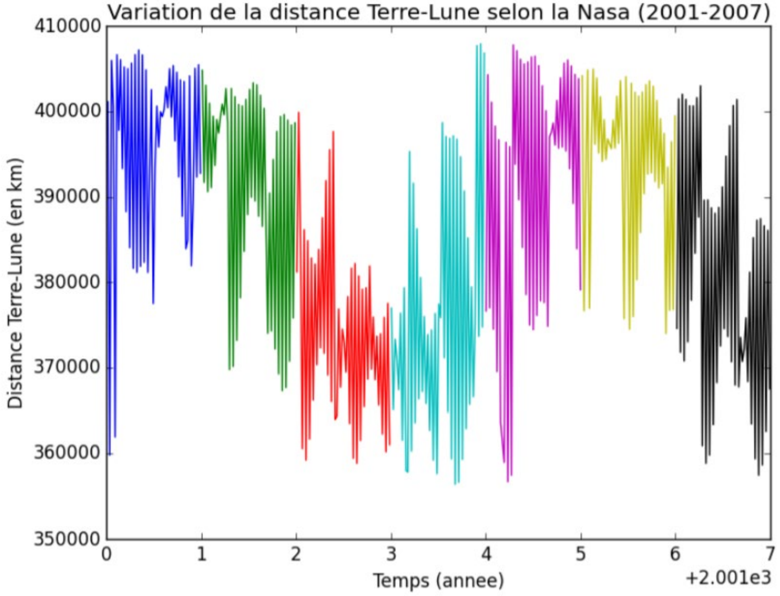
la distance est déterminée au centimètre près



Réflecteur "coin de cube" sur la Lune



La distance moyenne entre la Terre et la Lune est de 384'400 km

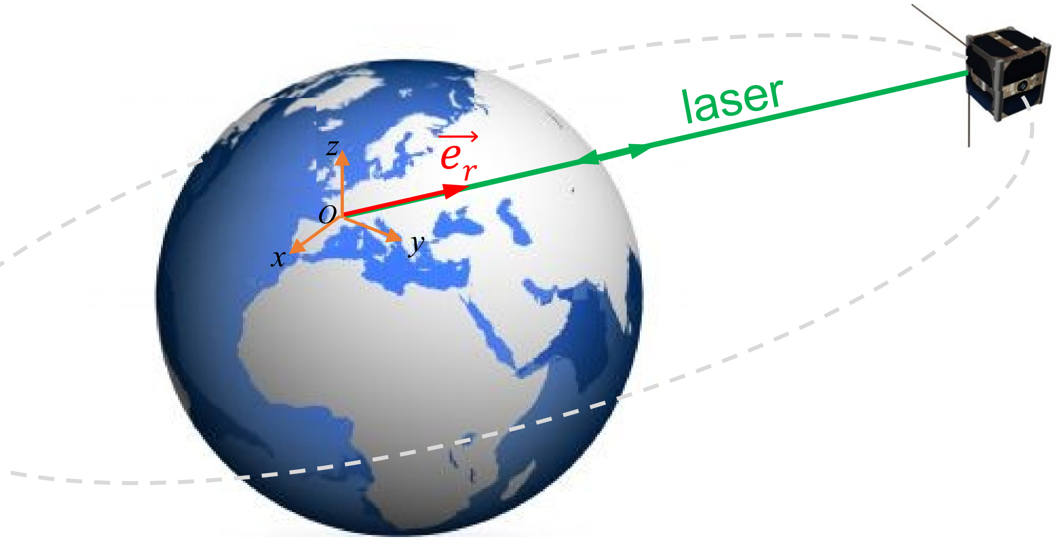


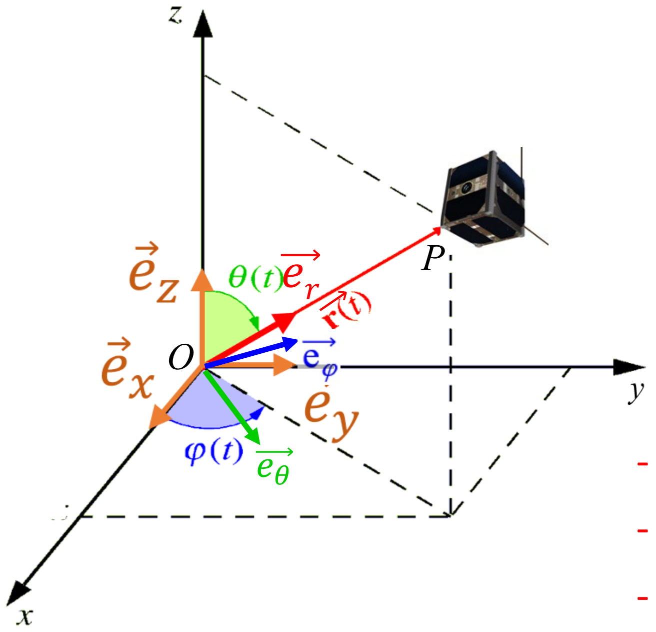
https://lejournal.cnrs.fr/videos/un-laser-de-la-terre-a-la-lune

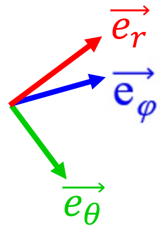
http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/laser-distance-terre-lune.xml

1.3.d. Coordonnées sphériques

Coordonnées sphériques : exemple d'un satellite







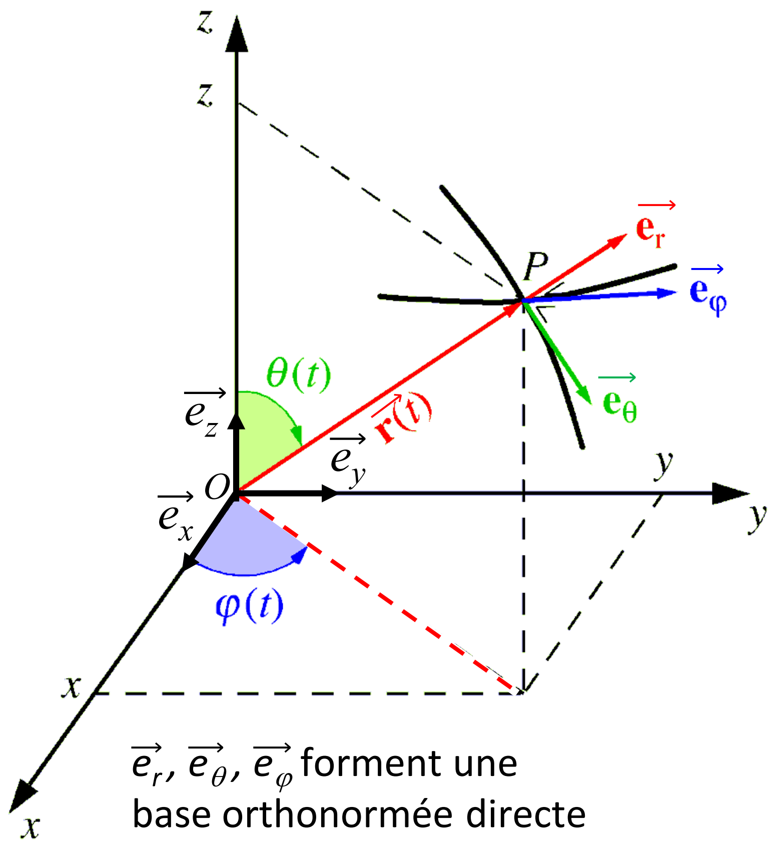
- $\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$, $\vec{e_\varphi}$ sont des vecteurs unitaires.
- Ils forment une base orthonormée directe.
- Ils dépendent du temps (position du point P)

- La position du satellite est définie dans le repère $(O; \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$.
- La position du point P est donnée par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.
- Les coordonnées sont r, θ et φ, (elles dépendent du temps).

1.3.d. Coordonnées sphériques

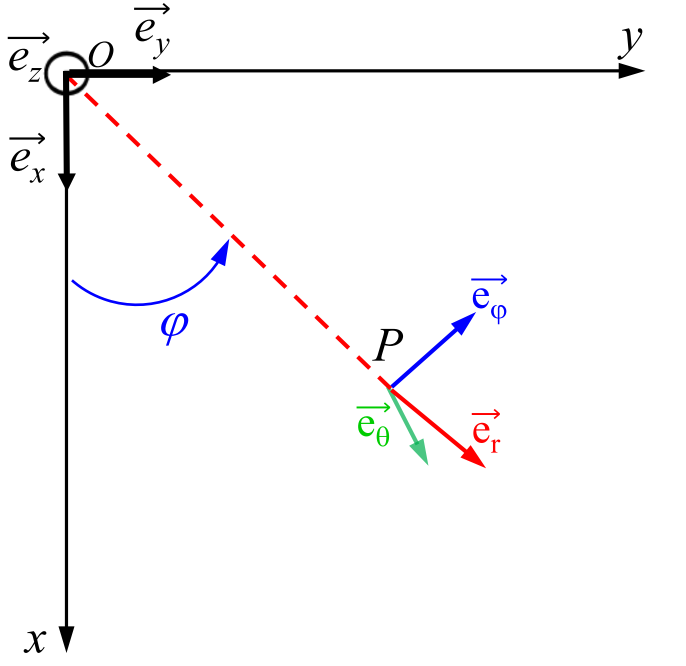
■ Définition des angles θ et φ, et des vecteurs unitaires $\vec{e_r}\,\vec{e_\theta}\,\vec{e_\varphi}$

situation pour θ = π/4 et φ = π/4

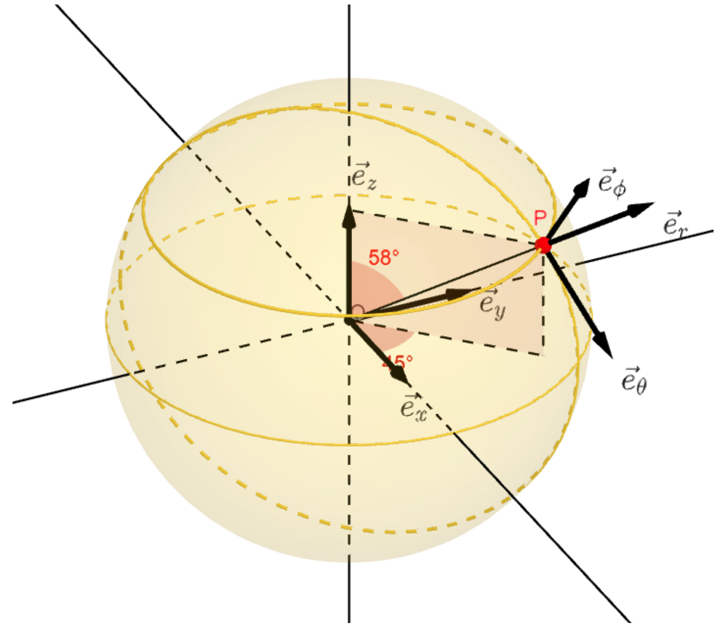


$\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ forment une base orthonormée directe

situation pour θ = π/4 et φ = π/4

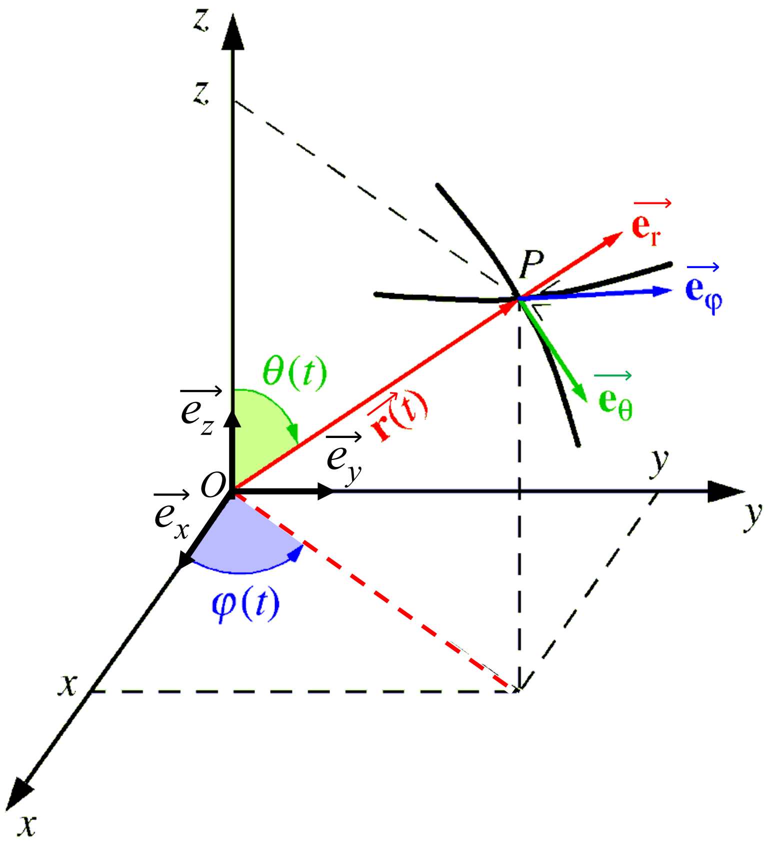


<u>Attention</u> : $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_r$ ne sont pas dans le plan *(xOy)*



[Coordonnées sphériques – GeoGebra]

1.3.d. Coordonnées sphériques



Composantes des vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ dans le repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

$\vec{e}_r$ vecteur unité dans la direction r (déplacement de P si φ et θ sont constants) ;

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_\varphi$ vecteur unité dans la direction φ (e_φ est tangent au cercle horizontal de rayon $r\sin\theta$). Dépl. de P si r et θ sont const ;

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_\theta$ vecteur unité dans la direction θ (e_θ est tangent au cercle vertical de rayon r). Dépl. de P si φ et r sont const ;

$$\vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

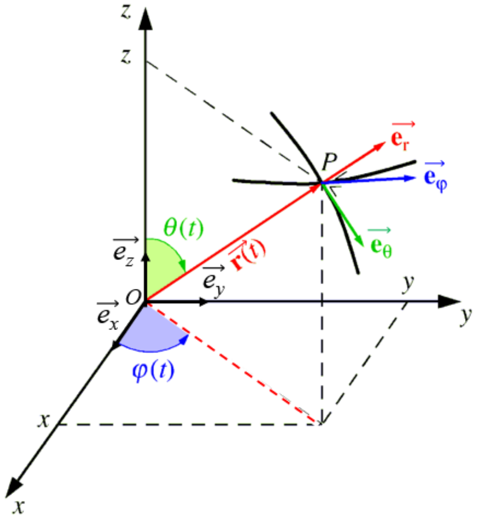
Les coordonnées de P sont r, θ, φ

Equation du mouvement : $\vec{r}(t) = r(t)\,\vec{e}_r$

1.3.d. Coordonnées sphériques

Position, vitesse et accélération en coordonnées sphériques

dans le repère $(O; \vec{e}_r\, \vec{e}_\theta\, \vec{e}_\varphi)$ en fonction de $r,\ \theta,$ et $\varphi,$ la position est $\boxed{\vec{r}(t) = r(t)\, \vec{e}_r}$



la vitesse est $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t)\, \vec{e}_r + r\,(t)\, \dot{\vec{e}}_r$

On peut démontrer les relation suivantes :

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\, \vec{e}_\varphi$$
$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\, \vec{e}_\varphi$$
$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\sin\theta\, \vec{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\vec{e}_\theta$$

et exprimer $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en fonction des vecteurs de base du système de coordonnées sphériques :

Vitesse

$$\vec{\mathbf{v}} = v_r\vec{\mathbf{e}}_r + v_\varphi\vec{\mathbf{e}}_\varphi + v_\theta\vec{\mathbf{e}}_\theta \begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\varphi = r\dot{\varphi}\sin\theta \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$$

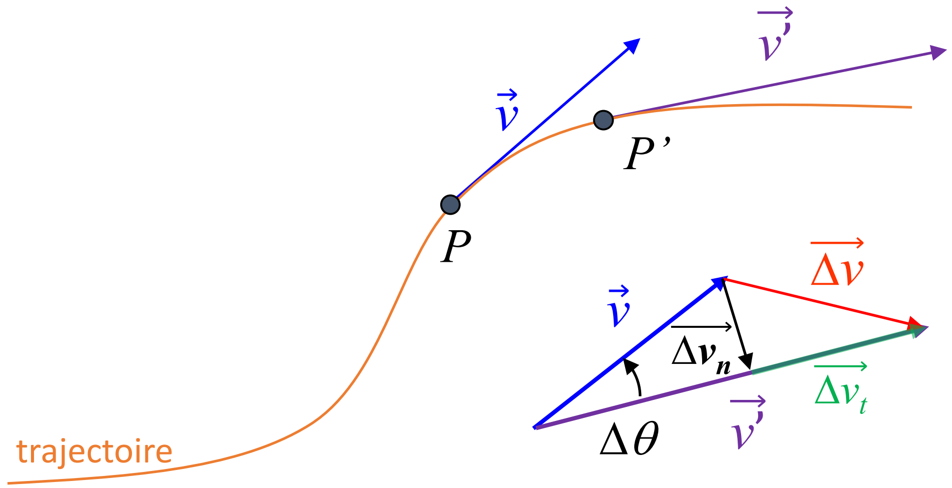
Accélération

$$\vec{\mathbf{a}} = a_r\vec{\mathbf{e}}_r + a_\varphi\vec{\mathbf{e}}_\varphi + a_\theta\vec{\mathbf{e}}_\theta \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \\ a_\varphi = r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta \end{cases}$$

Démonstrations disponibles sur Moodle

1.3.e. Repère de Frenet

■ Accélérations tangentielle et normale pour un mouvement curviligne



$$\overrightarrow{\Delta v} = \overrightarrow{\Delta v_n} + \overrightarrow{\Delta v_t}$$

$$\sin\Delta\theta = \Delta v_n / v$$

quand $t \to 0$ alors $\sin\Delta\theta \approx \Delta\theta \approx \Delta v_n / v \Rightarrow \Delta v_n \approx v\Delta\theta$

$$\Delta v_t = v' - v\cos\Delta\theta$$

quand $t \to 0$ alors $\Delta v_t \approx v' - v \Rightarrow \Delta v_t \approx \mathrm{d}v$

si $\varepsilon \to 0$ alors $\sin\varepsilon \approx \varepsilon$ et $\cos\varepsilon \approx 1$

On définit l'accélération normale instantanée :

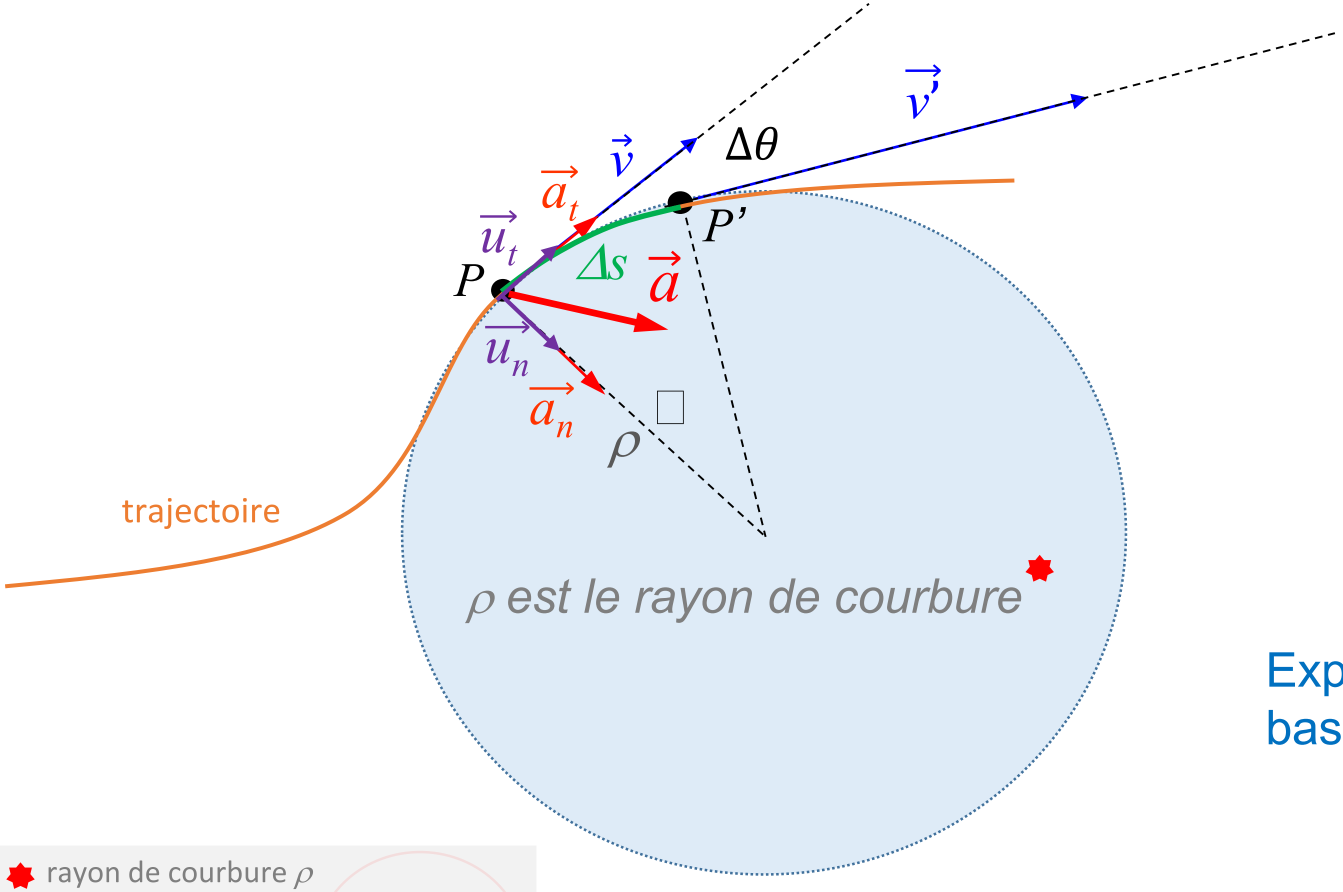
$$\boxed{a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v \frac{\Delta\theta}{\Delta t}}$$

On définit l'accélération tangentielle instantanée :

$$\boxed{a_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_t}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}}$$

1.3.e. Repère de Frenet

Accélérations tangentielle et normale pour un mouvement curviligne

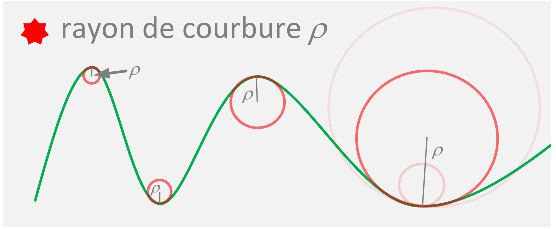


$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} v \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\Delta s = v\Delta t = \rho\Delta\theta \qquad \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{v}{\rho}$$

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} v \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{v^2}{\rho}$$

Nous avons donc $\boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho}}$ et $\boxed{a_t = \frac{dv}{dt}}$



Expression du vecteur accélération dans la base de Frenet :

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n}$$

$\vec{u}_t$ et $\vec{u}_n$ sont les vecteurs unitaires de la base de Frenet

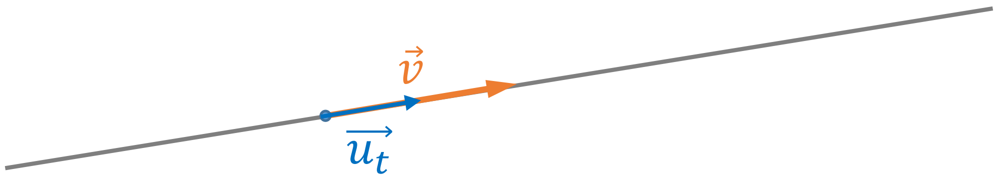
1.3.e. Repère de Frenet

■ Accélérations tangentielle et normale pour un mouvement curviligne

Expression du vecteur accélération dans la base de Frenet : $\boxed{\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u_t} + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{u_n}}$

Cas particuliers

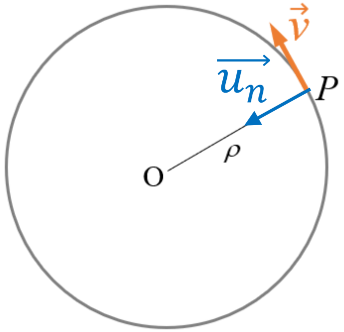
1 – Mouvement rectiligne uniformément accéléré



$$\rho \to \infty \implies \frac{v^2}{\rho} \to 0$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a_t} = \frac{dv}{dt}\,\vec{u_t}}$$

2 – Mouvement cirulaire uniforme (la vitesse est constante)

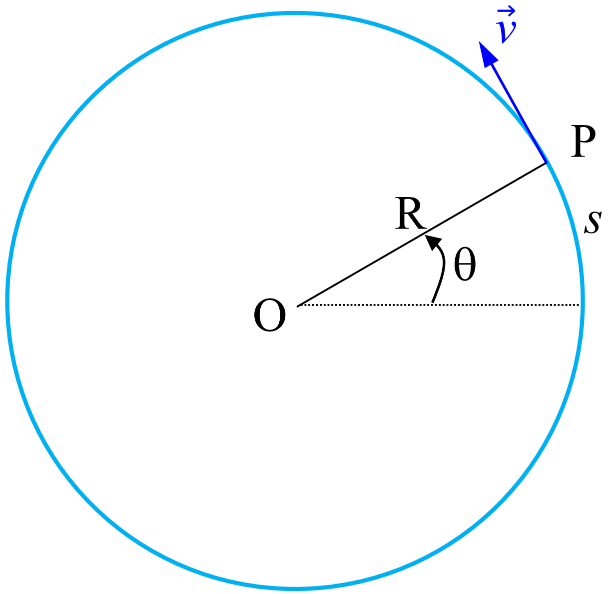


$$\frac{dv}{dt} = 0$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a_n} = \frac{v^2}{\rho}\,\vec{u_n}}$$

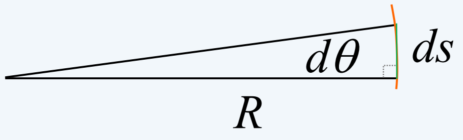
1.3.f. Mouvement circulaire uniforme

Vitesse angulaire scalaire



Nous savons que

$v = ds/dt$ or $ds = Rd\theta$



$\sin d\theta \approx d\theta = ds/R$

d'où $v = R\dfrac{d\theta}{dt} = R\omega$

La vitesse angulaire (scalaire) ω est une variation d'angle $d\theta$ sur un intervalle de temps dt, soit :

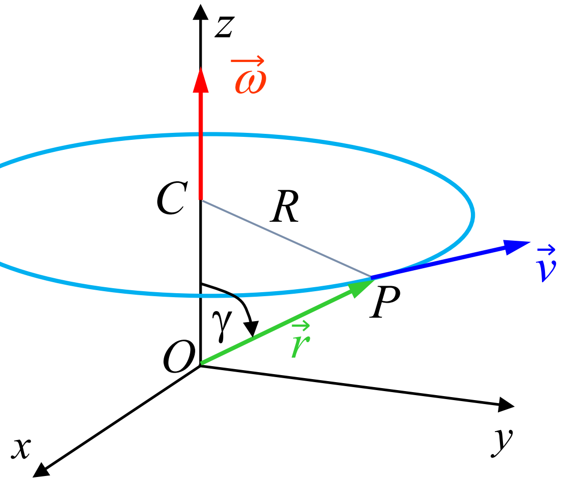
$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$$ (en rad.s^{-1} ou s^{-1})

et la vitesse de déplacement (scalaire) : $\boxed{v = R\omega}$

La vitesse angulaire ω est <u>constante</u> pour un <u>mouvement circulaire uniforme</u>

1.3.f. Mouvement circulaire uniforme

■ Vitesse angulaire vectorielle – *expression générale*



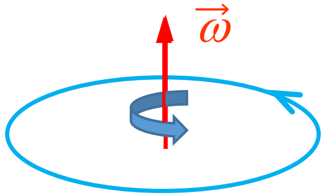
R est le rayon du cercle pour le mouvement de rotation de P autour de l'axe Oz

La vitesse pour un mouvement circulaire uniforme est $v = R\ \omega$

Or $R = r\ sin\gamma$ soit $v = \boxed{\omega\ \ r\ sin\gamma}$ ⇒ norme du produit vectoriel de $\vec{r}$ et $\vec{\omega}$

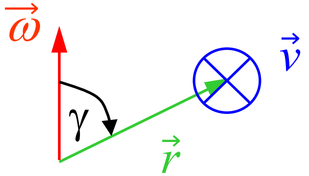
On introduit le vecteur $\vec{\omega}$, le vecteur vitesse angulaire

$\vec{\omega}$ est un vecteur perpendiculaire au plan de rotation et toujours dirigé vers le haut pour une rotation dans le sens trigonométrique (contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre).



La vitesse $\vec{v}$ pour un mouvement de rotation uniforme s'écrit alors :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$



Relation entre angle et vitesse angulaire :

$\theta = \omega t$

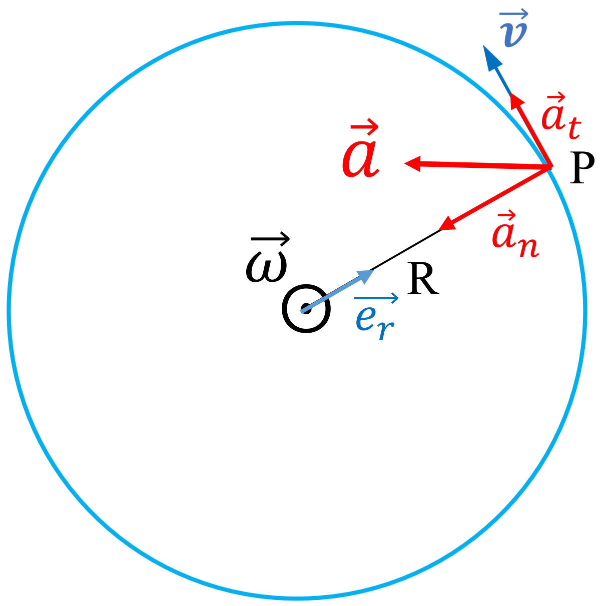
pour un tour complet : $t = T$ *(période)* et $\theta = 2\pi$

d'où $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ fréquence [s^{-1} ou hertz (Hz)]

1.3.g. Mouvement circulaire – Résumé

Mouvement circulaire avec $\vec{\omega}(t)$ la vitesse angulaire (ω n'est pas forcément constante)

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \text{avec} \quad \vec{r} = R\vec{e_r}$$



Accélération angulaire instantanée :

$$\alpha = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2 = \ddot{\theta}$$

Accélération tangentielle instantanée :

$$a_t = dv/dt = R\, d\omega/dt = R\alpha = R\,\ddot{\theta}$$

$v = R\omega$ avec R cte

Accélération normale instantanée :

$$a_n = v^2/R = R\omega^2 = R\dot{\theta}^2$$

accélération centripète

$v = R\omega$ avec R cte

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Remarque : mouvement circulaire uniforme ⇨ $v = cte$
d'où $a_t = 0$ *mais* a_n *non nulle* ($=v^2/R$)